Britta Nestler, Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe

Klausur zur Modellierung und Simulation
06. Juli 2009, SS 2009

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 40 Minuten (Master, Aufgaben 1 - 3) bzw. 90 Minuten (Wahlfach, Aufgaben 1 - 7)

Aufgabe 1: (Anfangswertprobleme)

Gegeben ist die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$y'(x) = 2xy \qquad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

a) Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für dieses Anfangswertproblem an.
b) Bestimmen Sie für die Schrittweite $h = 1/2$ die ersten drei Iterationsschritte des Eulerverfahrens.
c) Zeigen Sie, dass $y(x) = e^{x^2}$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist.
d) Bestimmen Sie den Fehler des Eulerverfahrens für $h = 1/2$ nach drei Iterationsschritten durch Vergleich mit dem exakten Wert $y(1) = e = 2,718$.
e) Geben Sie das Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung für dieses Anfangswertproblem an.
f) Bestimmen Sie für die Schrittweite $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt mit dem Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung.

Aufgabe 2: (Taylorformel)

a) Geben Sie die Taylorreihe von $\sin(2x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bis zur 5. Ordnung an (Hinweis: $\sin(0) = 0, \cos(0) = 1$).

b) Leiten Sie die Taylorreihe von $\sin(2x)$ aus a) gliedweise ab und zeigen Sie dadurch, dass für die Ableitung gilt $\Big(\sin(2x)\Big)' = 2\cos(2x)$.

Aufgabe 3: (Nullstellenverfahren)

Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ durch Umformulierung in ein Nullstellenproblem mit $f(x) = x^2 - 2$.

a) Verwenden Sie das Regula-Falsi Verfahren mit Startwerten $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ und berechnen Sie den Wert des ersten Iterationsschrittes.

b) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren für den Startwert $x_1 = 1$ den Wert des ersten Iterationsschrittes.

c) Vergleichen Sie beide Ergebnisse aus a) und b) mit dem exakten Wert (Hinweis: $\sqrt{2} = 1.4142$).

Aufgabe 4: (Interpolationspolynom)
Gegeben sind die Stützpunkte $(-2,0)$, $(-1,3)$, $(0,4)$ und $(1,2)$. Wenden Sie den Newton-Algorithmus (Schema der „Dividierten Differenzen”) an und bestimmen Sie das Interpolationspolynom, das die Stützpunkte verbindet.

Aufgabe 5: (Splines)
Gegeben sind die Stützpunkte $(-2,0)$, $(-1,3)$, $(0,4)$ und $(1,2)$.

a) Stellen Sie zur Bestimmung der quadratischen Spline-Funktionen

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad -2 \leq x \leq -1 \\ g_2(x) = a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ g_3(x) = a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

die erforderlichen 9 Bedingungen aus Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Randbedingungen $g_1'(0) = 1$ auf.

b) Stellen Sie das bestimmende Gleichungssystem für die Koeffizienten a_{ij} auf.

Aufgabe 6: (Numerische Integration)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Simpson-Formel eine Näherungslösung des Integrals

$$\int_0^4 \frac{1}{x+1} dx,$$

indem Sie das Intervall $I = [0,4]$ in zwei Doppelstreifen (d.h. vier Teilintervalle) zerlegen.

Aufgabe 7: (Raum-Zeit-Probleme)
Gegeben ist die partielle Differenzialgleichung

$$u_t(t,x) = u_x(t,x) - u(t,x) \quad \text{für} \quad x \in [0,3] \quad \text{und} \quad t \geq 0$$

mit Randbedingungen $u(t,0) = 0$, $u(t,3) = 4$ und Anfangsbedingung $u(0,x) = 1/2$, $0 < x < 3$. Das Gitter ist so gewählt, dass $\Delta x = 1$ und $\Delta t = 1/2$ ist.

a) Diskretisieren Sie die partielle Differenzialgleichung mit Vorwärtsdifferenzen in der Zeit t und zentralen Differenzen in der Ortskoordinate x. Stellen Sie die Formel für das explizite Differenzenverfahren auf. Geben Sie hierbei auch die Randbedingungen und die Anfangsbedingung in diskreter Form an.

b) Berechnen Sie unter Verwendung des expliziten Differenzenverfahrens die Werte u_1^1 und u_2^1 als Ergebnis der ersten Zeititeration.

Viel Erfolg!

Britta Nestler, Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe

Formelsammlung zur Vorlesung „Modellierung und Simulation"

Taylorformel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Newton-Algorithmus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Regula-Falsi Verfahren

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Rechteckformel

$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i), \quad \text{mit} \quad \xi_i = x_i \quad \text{oder} \quad \xi_i = \frac{1}{2}\Big(x_i + x_{i+1}\Big) \quad \text{oder} \quad \xi_i = x_{i+1}$$

Trapezformel

$$I_T = \frac{h}{2}\Big(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\Big)$$

Simpsonformel

$$I_S = \frac{4}{3} h(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1}) + \frac{2}{3} h(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) + \frac{1}{3} h(f_0 + f_{2m})$$

Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big\{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\Big\}$$

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit

$$\begin{aligned} F_1 &= f(x_k, y_k) \\ F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} F_1) \\ F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} F_2) \\ F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3) \end{aligned}$$