Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
05. Juli 2011, SS 2011

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 40 Minuten (Master, Aufgaben 1 - 3) bzw. 90 Minuten (KIT bzw. Wahlfach/Hochschule, Aufgaben 1 - 6)

Aufgabe 1: (Interpolationsverfahren)
a) Gegeben sind die Stützpunkte $(0, 1)$, $(1, 2)$ und $(2, 5)$. Bestimmen Sie durch Anwendung des Newton-Algorithmus (Schema der „Dividierten Differenzen") das Interpolationspolynom, das die Stützpunkte verbindet.

b) Bestimmen Sie mit der Zusatzbedingung $g_1'(0) = 1$ für die gegebenen Stützpunkte eine quadratische Spline-Funktion der Form

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ g_2(x) = a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases} .$$

Aufgabe 2: (Ausgleichsproblem)
Gegeben sind die folgenden Messpunkte:

x_i	-1	0	1
y_i	3	2	9

Gesucht ist eine Ausgleichsfunktion der Form: $f(x) = a + bx + cx^2$. Zur Bestimmung der Funktion $f(x)$ gehen Sie nach den folgenden Schritten vor:

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.

b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsparabel $f(x) = a + bx + cx^2$.

d) Tragen Sie die (x_i, y_i) Wertepaare in ein Koordinatensystem ein und skizzieren Sie die in c) gefundene Lösung.

Aufgabe 3: (Nullstellenproblem)
Für die Funktion $f(x) = x^2 - 2$ soll die Nullstelle über verschiedene Iterationsverfahren näherungsweise bestimmt werden.

a) Formulieren Sie für die Funktion $f(x)$ die Newtonsche Iterationsformel und bestimmen Sie zu dem Anfangswert $x_0 = 1$ die ersten beiden Iterationswerte x_1 und x_2.

b) Stellen Sie nun die Iterationsvorschrift für das Sekantenverfahren (Regula falsi) auf und berechnen Sie für die beiden Anfangswerte $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$ den ersten Iterationsschritt x_3.

c) Geben Sie an, gegen welchen Wert die beiden Verfahren bei Fortsetzung der Iterationen konvergieren.

Aufgabe 4: (Anfangswertproblem)
Gegeben ist die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$y'(x) = 2xy(x) + x \qquad \text{mit} \quad y(1) = 1,\ x \geq 1.$$

a) Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für diese Differenzialgleichung an.
b) Bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/2$ die ersten beiden Iterationsschritte des Eulerverfahrens.
c) Geben Sie das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung für diese Differenzialgleichung an.
d) Bestimmen Sie für $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

Aufgabe 5: (Numerische Integration)
Berechnen Sie für das Integral

$$\int_1^3 -x^2 + 4x\, dx$$

einen Näherungswert. Zerlegen Sie hierfür das Intervall $[1, 3]$ in vier Teilintervalle und verwenden Sie:
a) die Trapezformel und
b) die Simpsonformel.
c) Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals und vergleichen Sie diesen mit den Näherungswerten aus a) und b).

Aufgabe 6: (Partielle Differenzialgleichung und Taylorformel)

Gegeben ist die partielle Differenzialgleichung $u_t = u_x$ für $0 \leq x \leq 2$ und $t \geq 0$ und mit Randbedingungen $u(t, 0) = 0$, $u(t, 2) = 4$ und der Anfangsbedingung $u(0, x) = 1$. Zur numerischen Lösung soll das folgende Differenzenverfahren verwendet werden:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}.$$

a) Wählen Sie für das diskrete Raum-Zeit Gitter eine Raumzerlegung von $\Delta x = 1/2$, eine Zeitschrittweite $\Delta t = 1/4$ und eine Indizierung von $i = 0, \ldots$ und $n = 0, \ldots$. Geben Sie die Rand- und Anfangsbedingungen in diskreter Form an.

b) Berechnen Sie unter Verwendung des angegebenen Differenzenverfahrens die Werte u_1^1, u_2^1, u_3^1.

c) Der Diskretisierungsfehler für das Differenzenverfahren ist

$$e = \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} - \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x - \Delta x)}{2\Delta x}.$$

Entwickeln Sie $u(t + \Delta t, x)$ als Funktion von t bei festem x und $u(t, x + \Delta x)$, $u(t, x - \Delta x)$ als Funktion von x bei festem t jeweils in Taylorreihen bis einschließlich 3. Ordnung.

d) Bestimmen Sie unter Verwendung von c) den Diskretisierungsfehler e.

Viel Erfolg!

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Formelsammlung zur Vorlesung „Modellierung und Simulation"

Taylorformel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Newton-Algorithmus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Regula-Falsi Verfahren

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Rechteckformel

$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i), \quad \text{mit} \quad \xi_i = x_i \quad \text{oder} \quad \xi_i = \frac{1}{2}\Big(x_i + x_{i+1}\Big) \quad \text{oder} \quad \xi_i = x_{i+1}$$

Trapezformel

$$I_T = \frac{h}{2}\Big(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\Big)$$

Simpsonformel

$$I_S = \frac{4}{3}h(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1}) + \frac{2}{3}h(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) + \frac{1}{3}h(f_0 + f_{2m})$$

Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big\{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\Big\}$$

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit

$$\begin{aligned} F_1 &= f(x_k, y_k) \\ F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\ F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\ F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3) \end{aligned}$$

Fehlerfunktional des Ausgleichsproblems

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) := \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - f(x_i)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x_i)\Big)^2$$

Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Gauß-Newton-Verfahren (für nichtlineare Ausgleichsprobleme):

Für $k = 0, 1, \ldots$

- Berechne $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ als Lösung des linearen Ausgleichsproblems:
  Minimiere $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{\delta}^{(k)}||_2^2$
- Setze $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$.