Britta Nestler, Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe

Klausur zur Modellierung und Simulation
29. Januar 2009, WS 08/09

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 40 Minuten (Master, Aufgaben 1 - 3) bzw. 90 Minuten (Wahlfach, Aufgaben 1 - 6)

Aufgabe 1: (Numerische Integration)
Das folgende Integral kann als Näherung für $\pi = 3.14159$ verwendet werden:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

a) Berechnen Sie für $n = 2$ Teilintervalle den Näherungswert mit der Trapezformel.
b) Berechnen Sie den Wert des Integrals für $n = 2$ (2 Teilintervalle, also 1 Doppelstreifen) mit der Simpsonformel.
c) Bestimmen Sie für das Ergebnis aus a) und b) jeweils den Fehler zum Wert von π.

Hinweis: Trapez: $I_T = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n)$, Simpson: $I_S = \frac{4}{3}h(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1}) + \frac{2}{3}h(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) + \frac{1}{3}h(f_0 + f_{2m})$

Aufgabe 2: (Raum-Zeit-Probleme)
Gegeben ist die partielle Differenzialgleichung

$$u_t(t,x) = u_x(t,x) \quad \text{mit} \quad x \in [0,2] \quad \text{und} \quad t \geq 0,$$

mit Randbedingungen $u(t,0) = 0$, $u(t,2) = 3$ und Anfangsbedingung $u(0,x) = 1/2$ für $0 < x < 2$. Das Gitter ist so gewählt, dass $\Delta x = 1/2$ und $\Delta t = 1/8$ ist.

a) Diskretisieren Sie die partielle Differenzialgleichung mit Vorwärtsdifferenzen in der Zeit t und zentralen Differenzen in der Ortskoordinate x. Stellen Sie die Formel für das explizite Differenzenverfahren auf. Geben Sie hierbei auch die Randbedingungen u_1^n, u_5^n und die Anfangsbedingung u_i^0 in diskreter Form an.
b) Berechnen Sie unter Verwendung des expliziten Differenzenverfahrens die Werte u_2^1, u_3^1, u_4^1 als Ergebnis der ersten Zeititeration.

Aufgabe 3: (Splines)
Gegeben sind die Punkte $(x_1, y_1) = (0, 1)$, $(x_2, y_2) = (1/2, -1/2)$, $(x_3, y_3) = (1, 2)$.

a) Stellen Sie zur Bestimmung der kubischen Spline-Funktionen

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ g_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

die erforderlichen 8 Bedingungen aus Stetigkeit, Differenzierbarkeit und natürlichen Randbedingungen $g_1''(x_1) = 0, g_2''(x_3) = 0$ auf.
b) Stellen Sie das bestimmende Gleichungssystem für die Koeffizienten a_{ij} auf.

Aufgabe 4: (Partielles Ableiten)
Bilden Sie zu der Funktion

$$u(t, x, y, z) = \sin(2xy) - (6 + 2t)^2 + \frac{1}{z}$$

alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen (auch die gemischten).

Aufgabe 5: (Interpolationspolynom)

Gegeben sind die vier Stützstellen $(1/4, -5/8)$, $(1/2, -1/4)$, $(1, 2)$ und $(2, 23)$.

a) Bestimmen Sie über den Newton-Algorithmus (dividierte Differenzen) das Interpolationspolynom $p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, das durch die gegebenen Punkte verläuft.

b) Bestimmen Sie $p(0)$, den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 0$.

Aufgabe 6: (Anfangswertprobleme)

Gegeben ist die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$y'(x) = x + y(x) \qquad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

a) Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für diese Differenzialgleichung an.
b) Bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/4$ die ersten beiden Iterationsschritte des Eulerverfahrens.

Gegeben ist das gewöhnliche Differenzialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x) \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$.

c) Geben Sie die Eulersche Iterationsformel für dieses System an.

d) Berechnen Sie die ersten drei Iterationsschritte des Eulerverfahrens mit einer Schrittweite von $h = 1/2$.

e) Zeichnen Sie die in d) berechneten Wertepaare $(y_{1,k}, y_{2,k})$ in ein y_1/y_2 - Koordinatensystem ein.

Viel Erfolg!