

Klausur zur Modellierung und Simulation

06. Juli 2006, SS 06

Zugelassene Hilfsmittel: ein mit Handschrift einseitig beschriebenes Konzeptpapier, kein Taschenrechner, keine sonstigen Hilfsmittel, Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1: Gegeben ist eine Funktion $f(x)$.

- Entwickeln Sie $f(x)$ in eine Taylorreihe um x_0 bis einschließlich 3. Ordnung.
- Werten Sie die Taylorreihe an den beiden Stellen $x_0 + h$ und $x_0 - h$ aus.
- Bestimmen Sie für die zentrale Differenzenformel

$$Df(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

die Ordnung des Verfahrens (unter Verwendung der Taylorreihe).

- Sei nun

$$f(x) = \frac{x}{x + 1}.$$

Bestimmen Sie für $h = 0.5$ den Näherungswert der Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ mit der zentralen Differenzenformel.

- Vergleichen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil 1 d) mit dem exakten Wert der Ableitung $f'(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 2: Gegeben sind die Stützpunkte $(0, 1)$, $(1, 3)$, und $(3, 2)$.

- Wenden Sie den Newton-Algorithmus (Schema der „Dividierten Differenzen“) an und bestimmen Sie das Interpolationspolynom, das die Stützpunkte verbindet.
- Bestimmen Sie außerdem mit der Zusatzbedingung $g'_1(0) = 1$ für die gegebenen Stützpunkte eine quadratische Spline-Funktion

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für } 0 \leq 1 \\ g_2(x) = a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für } 1 \leq 3 \end{cases}$$

Aufgabe 3: Gegeben ist die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$y'(x) = x^2 + (y(x))^2 \quad \text{mit } y(0) = 1, x \geq 0$$

- Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für diese Differenzialgleichung an.
- Bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1$ die ersten beiden Iterationsschritte des Eulerverfahrens.
- Geben Sie das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung für diese Differenzialgleichung an.
- Bestimmen Sie ebenfalls für $h = 1$ die ersten beiden Iterationsschritte des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

Viel Erfolg!